Internationales Studienkolleg der Hochschule Kaiserslautern

Semester: Sommersemester 2020

FSP-Teilprüfung: Mathematik T2

Datum: 15.06.2020

Dauer: 90 Minuten

Prüfer: Dr. Jens Siebel, Dr. Alexander Baral, Werner Müller, Daniel Nyman, Jörg Wilhelm

Aufgabe 1

Wir haben die komplexe Zahl $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i$.

a) Zeichen Sie z in der komplexen Zahlenebene ein. Denken Sie auch an die korrekte Achsenbeschriftung *(2 Punkte)*.

b) Geben Sie z in der Exponentialform an. Rechnen Sie auf drei Nachkommastellen genau *(2 Punkte)*.

c) Berechnen Sie z^9. Rechnen Sie auf drei Nachkommastellen genau *(3 Punkte)*.

d) Bestimmen Sie alle Lösungen w von $w^4=z$. Rechnen sie auf drei Nachkommastellen genau *(3 Punkte)*

Aufgabe 2

Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:

$f''(x)+2\cdot f'(x)-2\cdot f(x)=x^2+x+1,\ f(0)=0,\ f'(0)=1$ *(10 Punkte)*.

Aufgabe 3

Kreuzen Sie jeweils das Feld ☐ mit der einzigen richtigen Alternative an *(10 Punkte)*.

richtige Antwort: 1 Punkt falsche bzw. fehlende Antwort: 0 Punkte

a)	$z=1-i \quad \Leftrightarrow$			
	$\overline{z}=\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 315°}$ ☐	$\overline{z}=-\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 45°}$ ☐	$\overline{z}=\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 45°}$ ☐	$\overline{z}=-1-i$ ☐
b)	Für $f(x)=\ln(5^x)$ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ gilt $f'''(1)=$			
	1 ☐	0 ☐	-1 ☐	5 ☐
c)	Der Winkel zwischen $\vec{a}=\begin{pmatrix}\sin(\pi/2)\\ e^0\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}\ln(e^{-1})\\ \cos(\pi/2)\end{pmatrix}$ ist $\varphi=$			
	$45°$ ☐	$90°$ ☐	$135°$ ☐	$180°$ ☐

d)	Für $f^{(4)}(x)-f'(x)=3\cdot e^{x}$ ist der Ansatz zur partikulären Lösung: $f_p(x)=$			
	$A\cdot e^{x}$ ☐	$x\cdot A\cdot e^{x}$ ☐	$x^3\cdot A\cdot e^{x}$ ☐	$3\cdot e^{x}$ ☐
e)	$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -12 & -7\end{pmatrix} \Leftrightarrow -A^T=$			
	$\begin{pmatrix}-7 & 3\\ -12 & 5\end{pmatrix}$ ☐	$\begin{pmatrix}-7 & -12\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ ☐	$\begin{pmatrix}-5 & 12\\ -3 & 7\end{pmatrix}$ ☐	$\begin{pmatrix}-7 & -3\\ 12 & 5\end{pmatrix}$ ☐
f)	$f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$ $\mathbb{D}_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\neq-1\wedge x\neq1\right\}$ hat die reellen Nullstellen:			
	$x_N=-\sqrt{2}, x_N=\sqrt{2}$ ☐	$x_N=0$ ☐	$x_N=0, x_N=1$ ☐	$x_N=1, x_N=-1$ ☐
g)	$f(x)=e^{x}-2$ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ hat ein Minimum an:			
	$x_{\min}=0$ ☐	$x_{\min}=-1$ ☐	$x_{\min}=1$ ☐	keines ☐
h)	$A(5\mid7)$ und $B(3\mid3)$ haben den Abstand $d=$			
	2 ☐	4 ☐	$\sqrt{20}$ ☐	20 ☐
i)	$f(x)=x^4-6\cdot x^2$ $\mathbb{D}_f=R$ hat die beiden Wendepunkte			
	$W_1(-1\mid-5)$, $W_2(1\mid5)$ ☐	$W_1(-1\mid-5)$, $W_2(1\mid-5)$ ☐	$W_1(-1\mid5)$, $W_2(1\mid-5)$ ☐	$W_1(-1\mid5)$, $W_2(1\mid5)$ ☐
j)	Die kleinste Determinante von $A=\begin{pmatrix}t^2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$ ist:			
	$\det A=-4$ ☐	$\det A=0$ ☐	$\det A=4$ ☐	keine ☐

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie alle reellen vertikalen und horizontalen Asymptoten von

$f(x)=\dfrac{x^4-4\cdot x^2+4}{4\cdot x-x^2}$ *(2 Punkte)*.

b) Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Nullstellen von

$f(x)=\dfrac{2\cdot x^3-6\cdot x^2+8\cdot x-4}{6\cdot x^2+6}$ *(4 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie für $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{8\cdot x^{\frac{15}{4}}}}{\frac{64}{7}\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2}$ die Fläche zwischen der x-Achse und dem

Funktionsgraphen im Intervall von $0\leq x\leq16$ *(4 Punkte)*.

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 1 & -2 & 5\\ 4 & 7 & -1\end{pmatrix}$ *(2 Punkte)*.

b) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen an *(1 Punkt)*.

c) Zeigen Sie, dass das Dreieck mit den Eckpunkten $A(2|4|4)$, $B(3|-2|3)$ und $C(4|2|1)$ im Punkt C einen rechten Winkel hat *(2 Punkte)*.

d) Wir haben die Ebene $\varepsilon:\ \vec{r}_\varepsilon=\begin{pmatrix}6\\9\\1\end{pmatrix}+p\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-4\end{pmatrix}+q\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}\quad p,q\in\mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Koordinatenform von ε *(2 Punkte)*.

e) Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt S der Geraden $\mathcal{G}:\ r_{\mathcal{G}}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}\quad t\in\mathbb{R}$ durch die Ebene $\varepsilon:\ -8\cdot x+8\cdot y-12\cdot z=-4$ *(3 Punkte)*.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit den Punkten $A(2|4)$ und $B(1|6)$ sowie mit dem Hochpunkt $H(0|8)$ *(3 Punkte)*.

b) Bestimmen Sie $z\in\mathbb{R}$ für $\int_z^{2\cdot z} x\,dx=6$ *(4 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie für $f(x)=\frac{1}{4}\cdot x^3-x$ die Tangentengleichung an der Stelle $x_0=2$ *(3 Punkte)*.